

Cours 9 : Stabilité non-linéaire / systèmes linéaires $n=2$

Nous étudions maintenant la stabilité de la solution nulle pour l'équation

$$(E) \quad x' = f(t, x),$$

où $f \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfait $f(t, 0) \equiv 0$.

Sous l'hypothèse supplémentaire que f est C^1 ,
peut "linéariser". On écrit

$$f(t, x) = D_x f(t, 0) x + r(t, x),$$

où $r \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ satisfait

$$\forall t \in [0, \infty), \quad |r(t, x)| = o(|x|) \quad (x \rightarrow 0).$$

On appelle l'équation

$$(H) \quad x' = A(t)x,$$

où $A(t) := D_x f(t, 0)$, la linéarisation de (E).

On dit aussi que (E) est une perturbation de (H).

Nous allons déduire de la stabilité de (H) des résultats de stabilité pour (E).

Cas 1: Supposons que $D_x f(t, 0)$ ne dépend pas de t , donc $A(t) \equiv A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et (E) s'écrit

$$(9.1) \quad x' = Ax + r(t, x).$$

Théorème 9.1: Soit λ_k ($k=1, \dots, n$) les valeurs propres de A . Supposons que $|r(t, x)| = o(|x|)$ lorsque $x \rightarrow 0$ uniformément en $t \in [0, \infty)$.

(a) Si $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, alors la solution nulle est uniformément et asymptotiquement stable pour (9.1).

(b) S'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\operatorname{Re} \lambda_k > 0$, alors la solution nulle est instable pour (9.1).

Exemple 9.1: Considérons le système

$$(9.2) \quad \begin{cases} x' = -kx e^{-y} - \sin y \\ y' = -ky \cos x + k \tan x \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}).$$

La matrice jacobienne du membre de droite

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -kx e^{-y} - \sin y \\ -ky \cos x + \ln x \end{pmatrix}$$

est

$$D_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x & \partial f_1 / \partial y \\ \partial f_2 / \partial x & \partial f_2 / \partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k e^{-y} & kx e^{-y} - \cos y \\ ky \sin x + \frac{1}{\cos^2 x} & -k \cos x \end{pmatrix},$$

d'où

$$A = D_{(x,y)} f(0,0) = \begin{pmatrix} -k & -1 \\ 1 & -k \end{pmatrix}.$$

Donc (9.2) s'écrit

(9.3)

$$\begin{cases} x' = -kx - y + r_1(x, y) \\ y' = x - ky + r_2(x, y) \end{cases}$$

où $|r_1(x, y)| + |r_2(x, y)| = o(|x| + |y|)$ ($(x, y) \rightarrow (0, 0)$).

Les valeurs propres de A sont solutions de

$$(k + \lambda)^2 + 1 = 0, \text{ soit } \lambda = -k \pm i.$$

Par le théorème 9.1, la solution nulle de (9.3) est uniformément et asymptotiquement stable si $k > 0$, et elle est instable si $k < 0$. Dans le cas $k = 0$, le théorème 9.1 ne donne pas d'information.

Nous verrons ci-dessous que le système est uniformément stable dans ce cas.

Cas 2: Nous considérons l'équation

$$(9.4) \quad x' = A(t)x + r(t, x),$$

où $A, r \in C^0([0, \infty) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, avec $r(t, 0) \equiv 0$.

Le théorème suivant fournit des résultats de stabilité pour (9.4), par perturbation de l'équation homogène

$$(H) \quad x' = A(t)x.$$

Théorème 9.2: Supposons qu'il existe une fonction $p \in C^0([0, \infty), [0, \infty))$ telle que $\int_0^\infty p < \infty$ et $|r(t, x)| \leq p(t)|x|$ pour $|x|$ petit et $t \in [0, \infty)$.

(a) Si (H) est uniformément stable, alors la solution nulle de (9.4) est uniformément stable.

(b) Si (H) est uniformément stable et asymptotiquement stable, alors la solution nulle de (9.4) est uniformément et asymptotiquement stable.

Stabilité par une fonction de Lyapounov

Lorsque $\operatorname{Re} \lambda_k = 0$ pour un $k \in \{1, \dots, n\}$, le théorème 9.1 ne donne pas d'information. Dans certains cas, on peut alors établir la stabilité en utilisant une "fonction de Lyapounov".

Nous illustrons la méthode par un exemple. Elle sera généralisée en exercice.

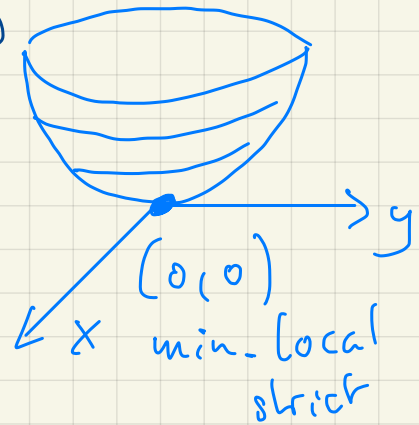
Exemple 9.2: Reprenons le système (9.2), cette fois avec $k=0$:

$$(9.5) \quad x' = -\sin y, \quad y' = \tan x.$$

Comme vu à l'exemple 9.1, le théorème 9.1 ne donne pas d'information concernant la stabilité de la solution nulle dans ce cas. Considérons la fonction $V(x,y) = 1 - \ln \cos x - \cos y$. On a clairement

$$(9.6) \quad V(0,0) = 0.$$

Par continuité de V , il existe $R > 0$ tel que V est définie sur $B_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| + |y| \leq R\}$ et satisfait



$$(9.7) \quad \forall (x, y) \in B_R \setminus \{(0, 0)\}, \quad V(x, y) > 0.$$

De plus, si $(x(t), y(t))$ est solution de (9.5), on a :

$$(9.8) \quad \forall t \in [0, \infty), \quad \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y} y'(t) \\ = -\frac{\sinh x}{\cosh x} x'(t) - \sinh y y'(t) = -\tanh x (-\sinh y) - \sinh y \tanh x = 0.$$

Ainsi, la fonction V est constante le long des trajectoires de (9.5). Une fonction V satisfaisant

(9.6), (9.7), (9.8) est appelée fonction de Lyapounov de (9.5).

A l'aide de V , nous montrons maintenant que la solution nulle de (9.5) est uniformément stable.

Puisque (9.5) est autonome, il suffit de montrer que $x \equiv 0$ est stable.

Soit $\varepsilon > 0$. Nous cherchons $\delta > 0$ tel que

$$|x_0| + |y_0| < \delta \Rightarrow |x(t)| + |y(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, \infty),$$

où $(x(t), y(t))$ est la solution de (9.5) avec condition initiale $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Puisque la trajectoire $(x(t), y(t))$ se situe sur une surface de niveau de

V , il existe $C \in \mathbb{R}$ t.q.

$$V(x(t), y(t)) = C \quad \forall t \in [0, \infty).$$

Choissant $\delta < R$, on aura par (9.7) que $C > 0$.

Comme $V(0,0) = 0$, par continuité on peut choisir

$\delta \in (0, R)$ assez petit tel que $|x_0| + |y_0| < \delta \Rightarrow$

$C = 1 - \ln(\cos x_0) - \cos y_0 > 0$ assez petit tel que

$$\forall t \geq 0, \quad 1 - \cos y(t) - \ln(\cos x(t)) = C$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \cos y(t) \leq C, \quad 0 \leq -\ln(\cos x(t)) \leq C$$

$$\Rightarrow |y(t)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \& \quad |x(t)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad \#$$

Systèmes linéaires dans le plan

Nous étudions maintenant la stabilité des systèmes linéaires autonomes dans le plan ($n=2$):

$$(9.9) \quad \begin{cases} x_1' = ax_1 + bx_2 \\ x_2' = cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}),$$

soit

$$x' = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Par le théorème 8.2, la stabilité de (9.9) dépend de la partie réelle des valeurs propres de A .

Posant

$$p = a + d, \quad q = ad - bc,$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - p\lambda + q.\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de A sont données par

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p \pm \sqrt{\Delta}), \quad \Delta = p^2 - 4q.$$

Si $\Delta \geq 0$, alors $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et leur signe peut être discuté en fonction de $p, q \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta < 0$, on a les racines complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(p \pm i\sqrt{|\Delta|}).$$

Dans ce cas $\operatorname{Re} \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} p$ et le signe de p détermine la stabilité de (9.9).

Nous étudions maintenant les portraits de phase de (9.9) en fonction des valeurs propres λ_1, λ_2 .
Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, la forme canonique de Jordan de A est

$$\text{soit } J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ ou } \lambda_1 = \lambda_2)$$

$$\text{soit } J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (\lambda = \lambda_1 = \lambda_2)$$

Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, alors

$$J = \begin{pmatrix} \alpha - i\beta & 0 \\ 0 & \alpha + i\beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Soit $T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ l.q. $TAT^{-1} = J$. Si $x(t)$ est solution de (9.9), alors $y(t) = Tx(t)$ satisfait

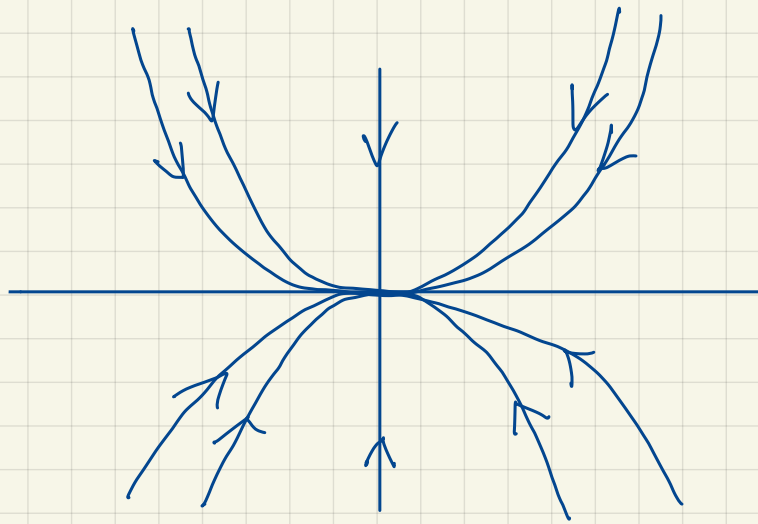
$$(9.10) \quad y' = Jy.$$

De plus la stabilité de (9.9) est équivalente à celle de (9.10). On a alors les cas suivants.

Cas 1: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
(cas. stable) (instable)

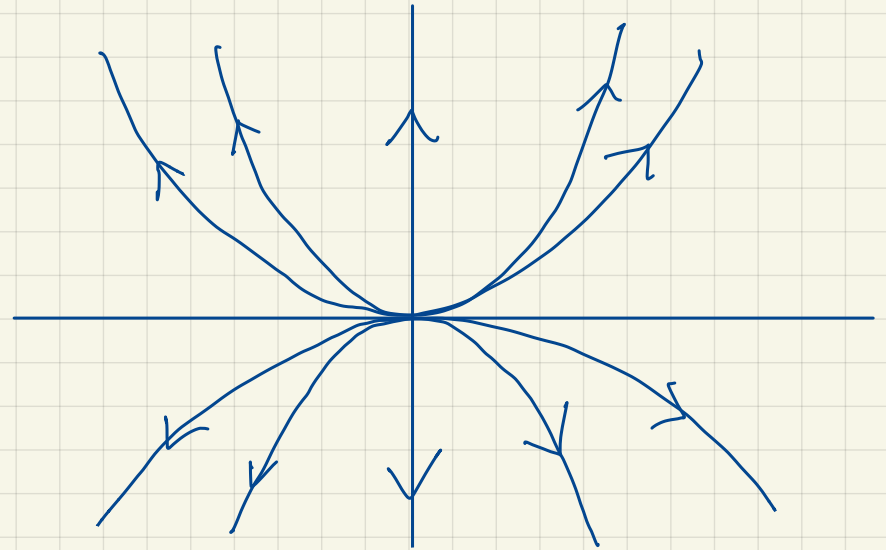
$$\hookrightarrow \text{sol. générale de } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

donnée par $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.



$$\lambda_{1,2} < 0$$

"noeud impropre"



$$\lambda_{1,2} > 0$$

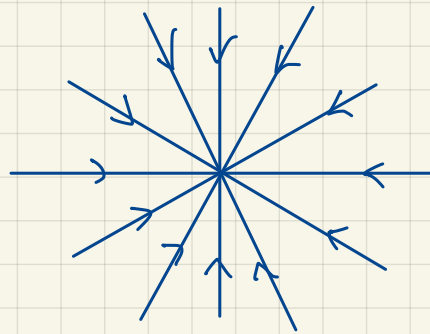
Cas 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$\hookrightarrow$ soit (a) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, soit (b) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow$ (a) $y_1(t) = c_1 e^{\lambda t}$, $y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$

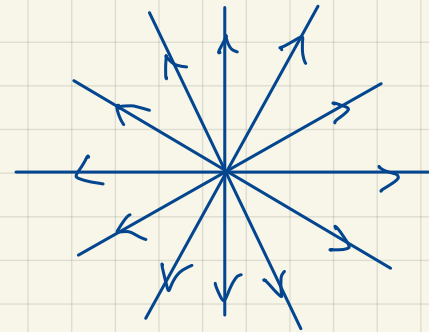
$$(b) \quad y_1(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda t}$$

↳ (a)



$$\lambda < 0$$

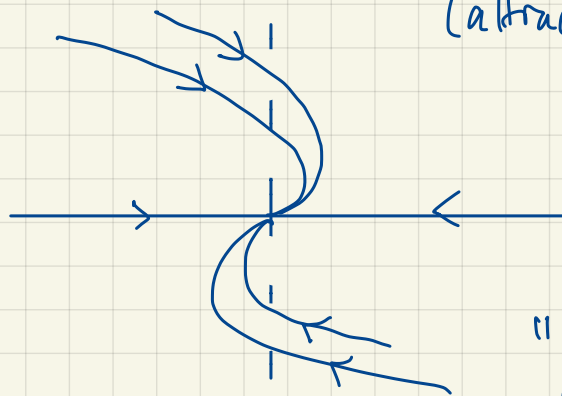
ou



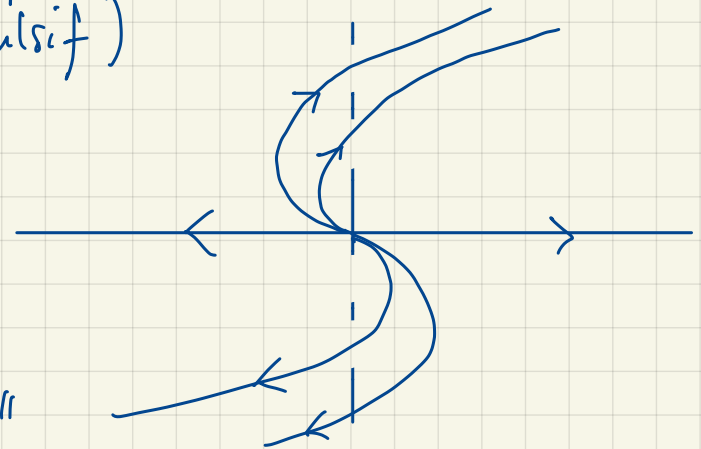
$$\lambda > 0$$

"noeud propre"
(attractif / répulsif)

(b)



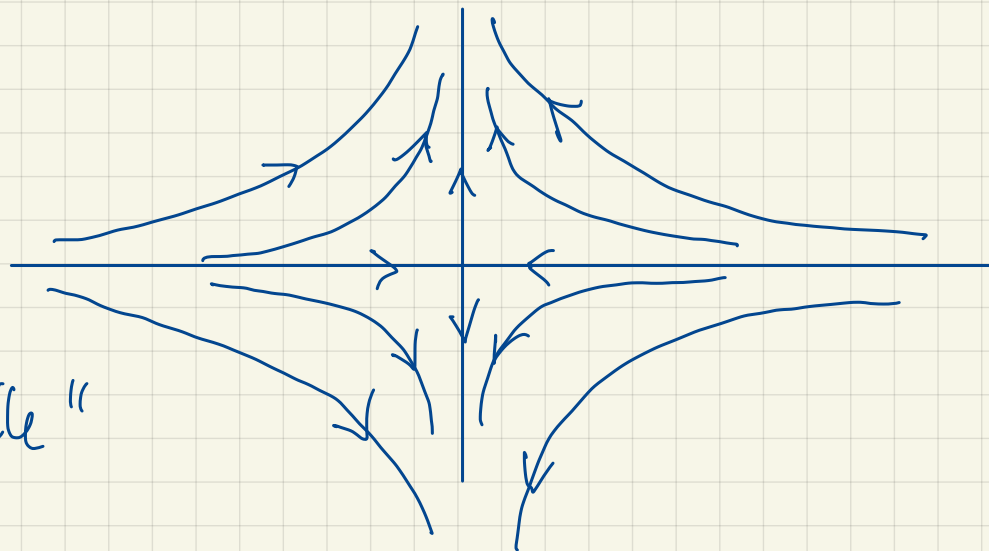
"noeud
dégénéré"



Cas 3 : $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0$

$$\text{↳ } y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = c_2 e^{\lambda_2 t}$$

↳



$$\lambda_1 < 0$$

$$\lambda_2 > 0$$

"point selle"

Cas 4: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Dans ce cas, le changement de variables

$$y_1 = r \cos \theta,$$

$$y_2 = r \sin \theta$$

donne

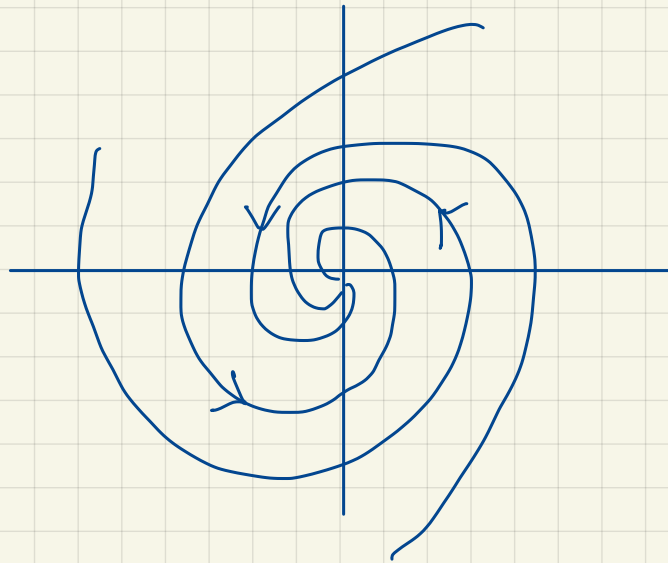
$$r' = \alpha r,$$

$$\theta' = -\beta$$

↳

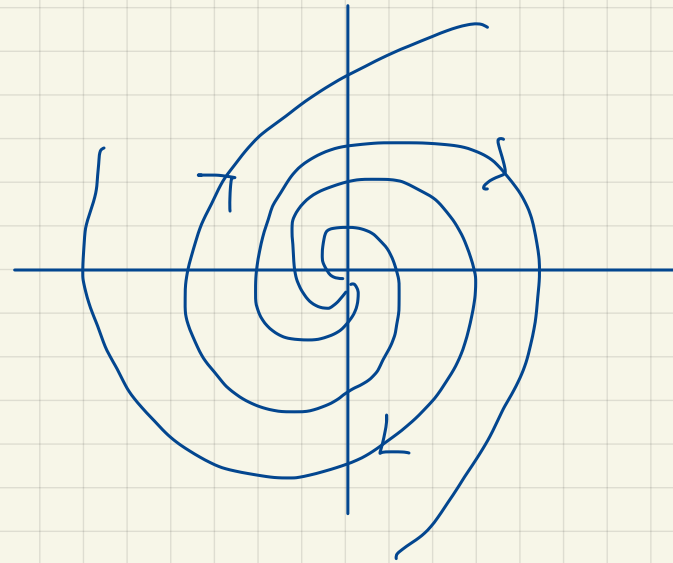
$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \theta_0 - \beta t$$

L_s



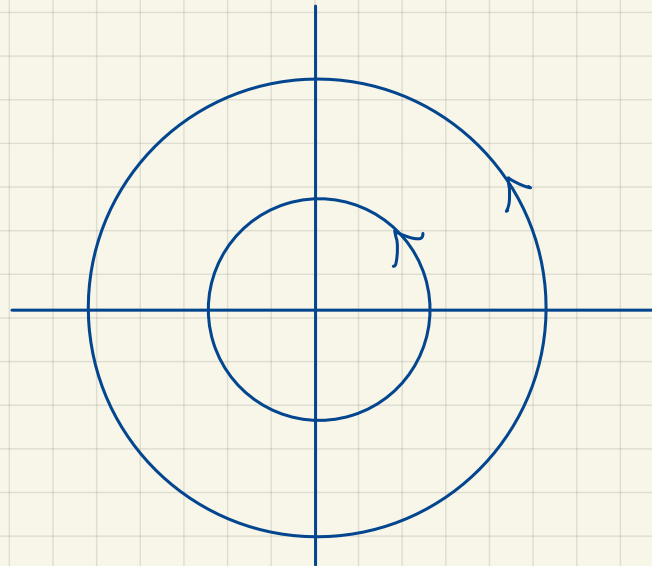
$$d < 0$$

"spirale attractive"



$$d > 0$$

"spirale répulsive"



$$d = 0$$

"centre"